

EXAMEN de Matemática Discreta
(Febrero 2009)

Ingeniería Informática

NOMBRE:

GRUPO:

Lee atentamente las siguientes instrucciones:

- Escribe tu nombre en el lugar indicado en esta hoja. **NO** escribas tu nombre en las demás hojas.
- **NO** puedes usar calculadora. Desconecta el teléfono móvil (si tienes).
- El examen dura **3 horas**.
- En cada una de las preguntas del test hay una **única** respuesta correcta.
- Cada pregunta respondida *correctamente* puntuará **0.4 puntos**. Cada pregunta respondida *incorrectamente* puntuará **-0.13 puntos**. Las preguntas sin contestar puntuarán **0 puntos**. Se aprueba a partir de **5 puntos**.

1. Sean A y B conjuntos tales que $A \subseteq_c B$ y sea $f : A \rightarrow B$. Considera los asertos:

1. f es inyectiva 2. f es suprayectiva

Determina el enunciado correcto:

- Necesariamente se cumple el primer aserto, pero no el segundo
- El primer aserto puede cumplirse, pero no el segundo
- Ambos asertos se cumplen necesariamente
- Ambos asertos pueden cumplirse

2. Sea $A \subseteq \mathcal{P}(B)$. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- $\cup A \in B$
- $\cup A \subseteq B$
- $\cup A \subseteq \mathcal{P}(B)$
- Ninguna de las anteriores

3. Sea $A \subseteq B$ y $B \in C$. Determina el enunciado correcto:

- Necesariamente $A \in C$
- Necesariamente $A \subseteq C$
- Si $A \in C$, entonces $A = B$
- Ninguna de las anteriores

4. Dados los siguientes conjuntos:

$$(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad [0, 1]$$

Determina el enunciado correcto:

- Los tres conjuntos son no numerables
- El primero es el único numerable
- El segundo es el único numerable
- El tercero es el único numerable

5. La relación binaria $R \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ se define como $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1)\}$. Determina el enunciado correcto:

- R es función, pero R^{-1} no lo es.
- R^{-1} es función, pero R no lo es.
- R y R^{-1} son funciones.
- R y R^{-1} no son funciones.

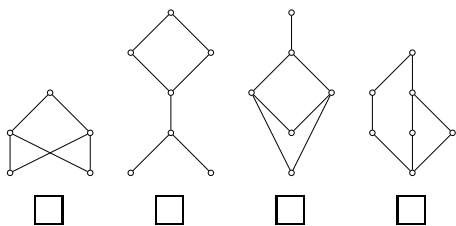
6. Considera el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ y las relaciones binarias sobre A :

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 1)\}$$
$$S = \{(2, 3), (1, 3), (3, 2)\}$$

Determina el enunciado correcto:

- $\text{dom}(R) \subseteq \text{dom}(S)$ y $\text{ran}(R) \cap \text{ran}(S) \neq \emptyset$
- $\text{dom}(R) \subseteq \text{dom}(S)$ y $\text{ran}(R) = \text{ran}(S)$
- $\text{dom}(R) \cap \text{dom}(S) \neq \emptyset$ y $\text{ran}(R) \subseteq \text{ran}(S)$
- $\text{dom}(R) \cap \text{dom}(S) \neq \emptyset$ y $\text{ran}(S) \subseteq \text{ran}(R)$

7. De los siguientes órdenes indica cuál es retículo:



8. Dadas las definiciones recursivas siguientes:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1 \\
 a_{2n} &= 2a_n - 3, & \text{si } n \geq 1 \\
 a_{2n+1} &= 3a_n + 5, & \text{si } n \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 1 \\
 b_{n+1} &= b_{n-1}, & \text{si } n \geq 0
 \end{aligned}$$

Determina el enunciado correcto:

- La primera está bien definida, pero la segunda no.
- La segunda está bien definida, pero la primera no.
- Las dos están bien definidas.
- Las dos están mal definidas.

9. Sea el grafo $G = (V, E)$ definido según la siguiente matriz de adyacencia:

$$\begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix}$$

Determina el enunciado correcto:

- El grafo es semi-euleriano y bipartito
- El grafo es semi-euleriano y no bipartito
- El grafo es bipartito y no es semi-euleriano
- El grafo no es semi-euleriano ni bipartito

10. En un grupo de 12 personas, 7 saben programar en Java, 8 en C, y 5 en Cobol. Además, 4 personas pueden programar en Java y C, 2 en Java y Cobol, y 3 en C y Cobol. Finalmente, 1 persona conoce los 3 lenguajes. Suponemos que estas personas **no** conocen lenguajes de programación distintos de estos tres. Determina el enunciado correcto:

- No hay ninguna persona cuyo *único* lenguaje sea Java.
- Sólo hay una persona que pueda programar *únicamente* en Java.
- Sólo hay dos personas que puedan programar *únicamente* en Java.
- Sólo hay tres personas que puedan programar *únicamente* en Java.

11. ¿Cuál de las siguientes propiedades es siempre cierta para números naturales positivos a y b cualesquiera?

- $mcd(a, b) \cdot mcm(a, b) = a \cdot b$
- $mcd(a, b) \cdot mcm(a, b) < a \cdot b$
- $mcd(a, b) \cdot mcm(a, b) > a \cdot b$
- $mcd(a, b) \cdot mcm(a, b) \neq a \cdot b$

12. Si p es un número primo, entonces

- \sqrt{p} es racional
- \sqrt{p} es entero
- \sqrt{p} es irracional
- \sqrt{p} es asimismo primo

13. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\bar{3} \cdot x = \bar{3}$ en $\mathbb{Z}/(6)$?
- 0
 1
 2
 3
14. La composición de una función inyectiva seguida de una sobreyectiva siempre da lugar a una función
- biyectiva
 inyectiva
 sobreyectiva
 ninguna de las anteriores
15. La función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$ es
- inyectiva y no sobreyectiva
 sobreyectiva y no inyectiva
 ni inyectiva ni sobreyectiva
 inyectiva y sobreyectiva
16. En el conjunto de los enteros se considera la relación binaria R tal que xRy si y solo si $4 \mid x + 3y$. ¿Cuál de las siguientes propiedades **no** cumple R ?
- Reflexiva
 Simétrica
 Antisimétrica
 Transitiva
17. ¿Cuál de las siguientes relaciones sobre el conjunto $\{0, 1, 2\}$ es a la vez simétrica y antisimétrica?
- $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (0, 0)\}$
 $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$
 $R_3 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$
 $R_4 = \{(1, 2), (2, 0), (0, 2)\}$
18. El orden de inclusión sobre un conjunto de la forma $\mathcal{P}(A)$ es total
- siempre
 nunca
 cuando A es infinito numerable
 cuando A es vacío o unitario
19. Sabiendo que (B, \sqsubseteq) es un álgebra de Boole finita, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente falsa?
- $|B| = 128$
 $|B| = 623$
 $|B| = 256$
 $|B| = 512$
20. Considera $A = \{i \mid i \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq i \leq 5\}$ y $B = \{i \mid i \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq i \leq 10\}$. ¿Cuántas funciones $f : A \rightarrow B$ hay que sean inyectivas?
- $\binom{10}{5} \cdot 10!$
 $\binom{10}{5} \cdot 5!$
 $\binom{10+5-1}{5}$
 $10^5 - 10^4$

21. ¿Cuántas palabras de longitud 10 se pueden formar con las letras $\{a, b, c\}$ de forma que tengan exactamente una b ?

- $10 \cdot 2^9$
 $10 \cdot 9^2$
 $10 \cdot \binom{9+2-1}{2}$
 $10 \cdot \binom{9}{2}$

22. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n) = \sum_{i=1}^n (6i - 2)$.

Determina el enunciado correcto:

- Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 100$ se tiene que $f(n) > n!$
 Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 100$ se tiene que $f(n) > 3n^2$
 Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 100$ se tiene que $f(n) > \frac{n^3}{125}$
 Las respuestas anteriores no son correctas.

Nota: No es necesario mirar los casos base.

23. Considera el grafo no dirigido $G = (V, E)$ tal que $V = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq 100\}$ y para todo $x, y \in V$, con $x \neq y$, $\{x, y\} \in E$ sii $x + y$ es par. Determina el enunciado correcto:

- El grafo es bipartito.
 El grafo es conexo.
 El grafo no es conexo pero todas sus componentes conexas son grafos Hamiltonianos.
 El grafo no es conexo pero todas sus componentes conexas son grafos Eulerianos.

24. Considera el grafo no dirigido $G = (V, E)$ tal que $V = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq 100\}$ y para todo $x, y \in V$, con $x \neq y$, $\{x, y\} \in E$ sii $x \cdot y$ es par. Determina el enunciado correcto:

- El grafo es bipartito.
 El grafo no es conexo.
 El grafo es conexo y Hamiltoniano.
 El grafo es conexo y Euleriano.

25. Considera las siguientes funciones:

- $f(n) = \prod_{i=2}^n (1 - \frac{1}{i^2})$
- $g_1(n) = \frac{1}{32} \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6) - \frac{1}{9} \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6) + \frac{5}{32} \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-5) \cdot (n-6) - \frac{1}{10} \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-6) + \frac{7}{288} \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)$
- $g_2(n) = \frac{n+1}{2 \cdot n}$

Determina el enunciado correcto:

- Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$ se tiene $f(n) = g_1(n)$.
 Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$ se tiene $f(n) = g_2(n)$.
 Existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $n_1, n_2 \geq 2$ y cumplen $f(n_1) \neq g_1(n_1)$ y $f(n_2) \neq g_2(n_2)$.
 Las respuestas anteriores no son correctas.